10. Hausübung zur Quantentheorie II, SS 2007

(abzugeben am Donnerstag, 28.06.2007)

Aufgabe H27 *Pfadintegral für den harmonischen Oszillator - Fortsetzung* (6 Punkte)

In Aufgabe H26 hatten Sie begonnen, den Zeitentwicklungsoperator für den harmonischen Oszillator zu berechnen. Hier kommt Teil II: Mit $\int d\eta \; e^{i\,\eta^T B\,\eta} = (i\pi)^{\frac{N-1}{2}} (\det B)^{-\frac{1}{2}}$ folgt

$$U(t_f, x_f; t_i, x_i) \;=\; \lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ N\to\infty}} \Big(\frac{m}{2\pi i\hbar \Delta t \det B}\Big)^{\frac{1}{2}} \; e^{\frac{i}{\hbar} S[x_{\mathrm{kl}}]} \;,$$

wobei Sie gezeigt hatten, daß

$$B \;=\; \begin{pmatrix} x & y & 0 & 0 & \dots \\ y & x & y & 0 & \dots \\ 0 & y & x & y & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \qquad \text{mit} \qquad x \;=\; 2-\Delta t^2\omega^2 \quad \text{und} \quad y \;=\; -1\;.$$

Wir bezeichnen mit I_n die Determinante der linken oberen $n{\times}n$-Untermatrix von B. Diese erfüllt die Rekursionsrelation

$$I_{n+1} \;=\; x\,I_n - y^2 I_{n-1} \qquad \text{für} \quad n = 0,1,2,\dots\;,$$

wobei $I_{-1} = 0$ und $I_0 = 1$ ist. Überprüfen Sie diese Beziehung für $n \le 2$ und folgern Sie

$$\frac{I_{n+1} - 2I_n + I_{n-1}}{\Delta t^2} \;=\; -\omega^2\, I_n\;.$$

Führen Sie nun eine neue Funktion ein,

$$\phi(t_n{-}t_i) \;=\; \phi(n\Delta t) \;:=\; \Delta t\; I_n\;,$$

so daß für den Kontinuumslimes gilt

$$\lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ N\to\infty}} \Delta t\,\det B \;=\; \lim_{\substack{\Delta t\to 0\\ N\to\infty}} \Delta t\; I_N \;=\; \phi(t_f{-}t_i) \;=\; \phi(T)\;.$$

Überlegen Sie sich die Anfangsbedingungen $\phi(0)$ und $\dot\phi(0)$ im Kontinuumslimes aus der Definition von ϕ. Zeigen Sie mit Hilfe der oben hergeleiteten Beziehung für I_n, daß im Limes $\Delta t \to 0$ die Funktion $\phi(t)$ die Differentialgleichung

$$\frac{d^2\phi(t)}{dt^2} \;=\; -\omega^2\phi(t)$$

erfüllt, lösen Sie diese und finden Sie somit die Gestalt von $U(t_f, x_f; t_i, x_i)$.

b.w.

Aufgabe H28 *Paritätstransformation und Zeitumkehr* (4 Punkte)

a) Eine Paritätstransformation P ändert das Vorzeichen des Ortsvektors, d.h. die Ortswellenfunktion transformiert sich gemäß $(P\psi)(\vec{x}) = \psi(-\vec{x})$. Zeigen Sie, daß diese Transformation das Skalarprodukt erhält. Damit ist sie nach Wigner entweder unitär oder antiunitär (d.h. antilinear, $P(\alpha\,|\psi_1\rangle + \beta\,|\psi_2\rangle) = \alpha^* P\,|\psi_1\rangle + \beta^* P\,|\psi_2\rangle$). Argumentieren Sie, daß P nicht antiunitär sein kann, indem Sie sich die Wirkung eines antilinearen P auf den stationären Zustand $|E,t\rangle = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Et/\hbar}\,|\psi\rangle$ eines Hamiltonoperators ansehen, dessen Spektrum nach unten begrenzt ist.

b) Unter einer Zeitumkehrtransformation wird die Dynamik eines Prozesses invertiert: aus dem Anfangszustand wird der Endzustand und umgekehrt. Zeigen Sie hiermit, daß die Zeitumkehr ein antiunitärer Operator sein muß. Betrachten Sie dazu die Zeitentwicklung
$$|\psi(t_2)\rangle \;=\; U(t_2,t_1)\,|\psi(t_1)\rangle \;.$$
Der zeittransformierte Zustand sei mit $|\psi^T(t)\rangle$ bezeichnet. Welche Zeitentwicklung muß die zeittransformierten Zustände $|\psi^T(t_1)\rangle$ und $|\psi^T(t_2)\rangle$ ineinander überführen? Zeigen Sie somit, daß
$$\langle\psi(t_2)|\,\psi^T(t_1)\rangle \;=\; \langle\psi(t_1)|\,\psi^T(t_2)\rangle$$
gelten muß, und folgern Sie hieraus die Antilinearität des Zeitumkehroperators.

Aufgabe H29 *Chiralität* (5 Punkte)

a) Zeigen Sie, daß Lösungen der freien Diracgleichung
$$(\mathrm{i}\hbar\,\gamma^\nu\partial_\nu - mc)\psi = 0 \qquad\qquad \text{(Summe über } \nu = 0,1,2,3)$$
mit der zusätzlichen Chiralitätsbedingung
$$\psi \;=\; \tfrac{1}{2}(1 \pm \gamma_5)\,\psi$$
masselose Teilchen (m=0) beschreiben.

b) Gewinnen Sie darstellungsunabhängig die Form des Hamiltonoperators für $m = 0$,
$$H \;=\; -c\,\gamma_5\,\vec{\Sigma}\cdot\vec{p}\;.$$

Hinweise: Der Vektor $\vec{\Sigma}$ ist definiert über $\Sigma^1 = \mathrm{i}\gamma^2\gamma^3$ und zyklisch. Es gilt außerdem
$$\gamma_5 := \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \;\;,\;\; \{\gamma^\nu,\gamma_5\} = 0 \;\;,\;\; (\gamma_5)^2 = \mathbb{1} \;\;,\;\; (\gamma^0)^2 = \mathbb{1} \;\;,\;\; (\gamma^i)^2 = -\mathbb{1} \;\;,\; i = 1,2,3\;.$$